**Дискретная математика** - область математики, в которой изучаются свойства структур **конечного характера**, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих  
 их элементов.

**Список литературы:**

1. **Яблонский С.В. - Введение в дискретную математику**
2. **Белоусов А.И. - Дискретная математика**
3. **Капитонова Ю.В. и др. – Лекции по дискретной математике**
4. **Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. - Элементы дискретной математики**
5. **Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов**
6. **Зайцева С.С. Дискретная математика**

К разделам дискретной математики обычно относятся:   
***теория множеств, комбинаторика, общая алгебра, теория графов, математическая логика, теория алгоритмов, теория автоматов, теория кодирования и т.д.***

**1. Множества. Операции над множествами.**

**1.1. *Множество. Способы задания множеств.***

**Дискретная математика** изучает в основном конечные множества и операции на них.

В 1872 г. **Георг Кантор**, создатель теории множеств, дал следующие определения для множества:

***Множество*** *– это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью.*

***Множество*** *– это определенная совокупность объектов. Эти объекты называются элементами множества.*

**Множества** обозначаются прописными буквами латинского алфавита: ***A*, *B*, *X*, *Y*, *A*1, *A*2,** …,

**элементы множеств** – строчными буквами:   
***a*, *b*, *x*, *y*, *a*1, *a*2, … .**

Числовые множества:

***N*** - множество всех натуральных чисел;

***N0*** - множество неотрицательных целых чисел

***Z*** -множество целых чисел;

***Q*** - множество рациональных чисел;

***I*** - множество иррациональных чисел;

***R*** - множество действительных чисел;

***C*** - множество комплексных чисел;

Символ **∈** обозначает *принадлежность*.

Запись означает, что элемент *x* принадлежит множеству *A*.

Если элемент *x* не принадлежит множеству *A*, то пишут .

Множества бывают:

1. **конечные**; частный случай – **единичное** (одноэлементное) множество, например, множество преподавателей в этой аудитории, или множество десятичных цифр;
2. **бесконечные**; пример – множество натуральных чисел;
3. **пустое** (Ø).

***Пустым множеством*** *называют множество, не содержащее ни одного элемента.*

**Способы задания (описания) множеств:**

1) Множество *A* определяется непосредственным ***перечислением всех своих элементов*** *a1, a2, …, an*, т.е. записывается в виде: ***A*={*a1, a2, …, an*}.** При задании множества перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурных скобках и разделяют запятыми.

Перечислением можно задавать только *конечные* множества.

2) Множество *A* определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества *T*, которые обладают общим свойством *P(x)*.

В этом случае используется обозначение

,

т.е. элементы множества задается ***характеристическим предикатом*** *(условием).*

Характеристическим предикатом можно задать как ***конечные***, так и ***бесконечные*** множества.

1. Множество *A* можно задать ***порождающей процедурой*** (рекурсивное задание, задание алгоритмом). Используется обозначение

.

Порождающая процедура – это процедура, которая в процессе работы порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определенного множества.

***Пример ..*** – множество натуральных чисел от 1 до 4. Множество задано *перечислением* всех своих элементов. Причем, элемент 3∈*A*, а 5∉*A*.

***Пример ..*** *M*={C, C++, Java, C#} – множество языков программирования, имеющих С-подобный синтексис. Задано *перечислением*.

***Пример ..*** Множество *A* из примера 1.1. можно задать *характеристическим предикатом* .

***Пример ..*** Зададим рекурсивно множество *X* алгоритмом:

1) 3∈*X*;

2) если *x*∈*X*, то элемент и (1−*x*) принадлежат *X*;

3) других элементов в *X* нет.

Заметим, что это множество – конечное, и его можно было задать выписыванием его элементов

.

Частным случаем рекурсивного задания множества является способ задания, основанный на процедуре, называемой **математической индукцией**. Рассмотрим его на примере задания множества натуральных чисел.

***Пример ..*** Множество ***N*** задается следующими правилами:

1) задается базис индукции (исходный элемент):

1∈***N***;

2) указывается индуктивный переход:

если *n*∈***N***, то (*n*+1)∈***N***;

3) устанавливается правило замыкания:

других элементов, кроме построенных правилами 1 и 2, в ***N*** нет.

**Задача:** Определить различными способами множество **М2n-1** всех нечетных чисел, не превышающих 10.

**1.2. *Подмножество. Равенство множеств. Универсум. Булеан.***

**Определение 1.1.** Множество ***A*** называется ***подмножеством*** множества ***B***   
(обозначается ***A*⊆*B***), если каждый элемент ***A*** есть элемент ***B***,

т.е. если ***x*∈*A*,** то ***x*∈*B*.**

Символ **⊆** обозначает ***отношение включение*** между множествами.

***Пример ..*** Пусть и   
. Тогда *B*⊆*A*.

Но .

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя, т.е. ***A*⊆*A***.

Пустое множество ∅ всегда является подмножеством любого множества B.

**Определение 1.2.** Пусть *A* и *B* – некоторые множества. Говорят, что ***A* *равно* *B***, и пишут ***A*=*B*,** если для любого ***x*** имеем: ***x*∈*A*** тогда и только тогда, когда ***x*∈*B***.

Иначе говоря, ***A*=*B*** тогда и только тогда, когда

***A*⊆*B*** и ***B*⊆*A*.**

Если ***A*⊆*B*** и ***A*≠*B***, то это записывается ***A*⊂*B***, и говорят, что ***A*** есть ***собственное   
подмножество B*.**

Если во множестве B найдется хотя бы один элемент ***xi,*** который не принадлежит ***A* -∃xi, xi ∈ B,** **xi ∉ A,** то **A** — ***собственное подмножество*** ***B*,** ***A ⊂ B***.

Пустое множество есть подмножество любого данного множества *A*, т.е. ∅⊂*A*.

Таким образом, доказательство равенства двух множеств *A* и *B* состоит из двух этапов:

1) Доказать, что *A* есть подмножество *B*.

2) Доказать, что *B* есть подмножество *A*.

**Определение 1.3. *Универсальное множество U*** (или ***универсум***) есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

В теории чисел универсальное множество обычно совпадает с множеством всех целых или натуральных чисел.

В математическом анализе универсальное множество может быть множеством всех действительных чисел или множеством всех точек n-мерного пространства.

Универсальное множество U, хотя, и названо универсальным, однозначно не определено, если точно не указана область рассмотрения (предметная область).

По определению, каждое множество есть подмножество универсального множества.

***Пример ..*** Так, для множества  за универсум можно взять множество натуральных чисел, т.е. *U=****N***.

**Определение 1.4. *Булеаном*** множества *A* (обозначается (*A*)) называетсямножество, состоящее из всех подмножеств множества *A*.

***Пример ..*** Пусть .

Следовательно, булеан множества *A* есть множество

(*A*)=.

Множество *A* из примера 1.8. содержит три элемента, а булеан (*A*) состоит из 23=8 элементов.

В общем случае, если множество *A* содержит *n* элементов, множество (*A*) включает 2*n* элементов, т.к. ***A*** имеет **2*n*** подмножеств.

По этой причине **(*A*)** часто обозначают через **2*A*.**

**1.3. *Операции над множествами.***

Множество часто задают графически с помощью ***диаграмм******Эйлера*** [Л. Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, механик и физик].

Например, задание множеств *M*1={*a*, *b*, *c*, *d*} и *M*2={*a*, *c*, *e*, *f*} приведено на рисунке, где замкнутые линия, называемые кругами Эйлера, ограничивают элементы одного множества.

*b*

*d*

*a*

*c*

*e*

*f*

В дальнейшем графическое изображение множеств было плодотворно исследовано Дж. Венном (1834-1923), создавшим диаграммную теорию изучения множеств различной природы.

Диаграммы, задающие множества, принято называть *диаграммы Эйлера-Венна*.

Если имеются некоторые множества, то из них можно получать новые с помощью определенных операций. Для наглядного изображения операций над множествами воспользуемся диаграммами Эйлера-Венна.

**Определение 1.5. *Объединением множеств A и B*** *называется множество, (которое обозначается* ***AВ****) состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств* ***А*** *или* ***В****.*

***А*∪*В*=**



***Пример .9.*** Пусть ,

.

Тогда .

**Определение 1.6. *Пересечением множеств А и В*** *называется множество, (которое обозначается* ***АВ****) которое состоит из общих элементов этих множеств.*



***А*∩*В***=

***Пример .10.*** Пусть ,  
 . Тогда .

**Определение 1.7. *Разностью множеств А и В*** *называется множество, (которое обозначается* ***А\В)*** *всех тех и только тех элементов множества* ***А,*** *которые не принадлежат* ***В****.*

**

*А*

*В*

***А*\*В***=

**Определение 1.8. *Симметрическая разность множеств А и В*** *(обозначается* ***А∆В****) есть множество* ***(А\В)*∪*(В\А).***

******

******

*А*

*В*

***Пример .11.*** Пусть , .

Тогда , ,

.

**Определение 1.9. *Дополнением множества А (обозначается ) –*** *это множество элементов универсума, которые не принадлежат* ***А****, т.е. .*

** ******

***Пример .12.*** Пусть.

Тогда, если ,   
то .

Операции пересечения и объединения допускают следующее обобщение.

Пусть задано семейство множеств , где . Тогда

Операции над множествами обладают рядом важных свойств.

**Теорема 1.1.** Пусть задан универсум *U*. Тогда ∀ *A*, *B*, *C* ⊂ *U* выполняются следующие свойства:

1. Свойства **коммутативности**:   
 *АВ*=*ВА* *АВ*=*ВА*

2. Свойства **ассоциативности**:

*А*(*ВС)*=(*АВ*)*С А*(*ВС*)=(*АВ*)*С*

3. Свойства **дистрибутивности**:

*А*(*ВС)*=(*АВ*)(*АС*)

*А*(*ВС)*=(*АВ*)(*АС*)

4. Свойства **тождества**:

*А*=*А* *А*=

*АU*=*U АU*=*А*

5. Законы **идемпотентности**:

*АA*=*A АA*=*A*

1. Свойства **поглощения**:

*А*(*АВ)*=*А А*(*АВ)*=*А*

7. **Двойное** **дополнение**: 

1. Свойства **дополнения**:

*А*=*U А*=

1. **Законы де Моргана**:



Проверка всех законов может быть выполнена с помощью **диаграмм Венна** или часто используемого в теории множеств **Метода сравнения элементов.**

**Принцип двойственности**

Символы **∪** и **∩** и символы и **∅** называются двойственным друг к другу.

Если в каком-либо из основных законов заменить каждый из этих символов на двойственный ему, то в результате снова получится один из этих же законов, например:

Отсюда имеем: *каждой теореме, которая может быть выведена из основных законов, соответствует другая, двойственная ей теорема, получающаяся из первой посредством указанных перестановок символов.*

**Определение 1.10. *Покрытием*** множества *A* называется набор подмножеств ,   
где *I* – некоторое множество индексов, если каждый элемент *A* принадлежит хотя бы одному из ***Ai*.**

***Пример .3.*** Пусть *A*={, , , 🞻}.

Тогда {{}, {, }, {, , 🞻}} является покрытием множества *A*.

**Определение 1.11. *Разбиением*** множества *A* называется набор его *попарно непересекающихся* подмножеств , где *I* – некоторое множество индексов.

- разбиение множества *A*, если выполняются два условия:

1) ;

2) , т.е. *a*∈*A* тогда и только тогда, когда *a*∈*Ai* для некоторого *i*∈*I*.

***Пример ..*** Пусть *A*={, , , 🞻}.

Тогда множество <*A*>={{}, {, , 🞻}} является разбиением множества *A*.

Всего возможны 17 вариантов разбиения множества A.